



UNIVERSIDADE FEDERAL DO SUL E SUDESTE DO PARÁ
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E ENGENHARIA
FACULDADE DE ENGENHARIA DA COMPUTAÇÃO

Gabriel Vilarino Gonçalves

**Solução do Problema da Mochila Usando o Algoritmo Quântico
QAOA no Computador Xanadu (PennyLane)**

Marabá - PA

2025

Gabriel Vilarino Gonçalves

**Solução do Problema da Mochila Usando o Algoritmo Quântico
QAOA no Computador Xanadu (PennyLane)**

Projeto Final de Curso II, apresentado na Faculdade de Engenharia da Computação da Unifesspa como requisito básico para a conclusão do Curso de Bacharelado em Engenharia da Computação.

Orientador (a):

Prof. Me. Erberson Rodrigues Pinheiro dos Santos

Marabá - PA

2025

Gabriel Vilarino Gonçalves

**Solução do Problema da Mochila Usando o Algoritmo Quântico
QAOA no Computador Xanadu (PennyLane)**

Projeto Final de Curso II, apresentado na Faculdade de Engenharia da Computação da Unifesspa como requisito básico para a conclusão do Curso de Bacharelado em Engenharia da Computação.

BANCA QUALIFICADORA:

Prof. Me. Erberson Rodrigues Pinheiro dos Santos
(Orientador – UNIFESSPA)

Prof^a. Me. Aline Farias Gomes de Sousa
(Membra da Banca – UNIFESSPA)

Prof^a. Me. Aline Farias Gomes de Sousa
(Membra da Banca – UNIFESSPA)

Marabá - PA

2025

RESUMO

A Lei de Moore, proposta por Gordon Moore em 1965, observa que o número de transistores em circuitos integrados dobra a cada 2 anos, impulsionando o avanço tecnológico. No entanto, a miniaturização enfrenta limites físicos, com efeitos quânticos surgindo à medida que os transistores se tornam menores. Como alternativa, a computação quântica emergiu, explorando propriedades como superposição e emaranhamento para superar essas limitações. Iniciada por Richard Feynman em 1982, a computação quântica utiliza qubits, que podem assumir múltiplos estados simultaneamente, permitindo processamento exponencialmente mais rápido que computadores clássicos. Atualmente há pelo menos duas dezenas de computadores quânticos ativos e os problemas de otimização são os mais cotados para demonstrar a vantagem quântica. Um problema que possui várias aplicações é o problema da mochila, que pode ser muito demorado para se encontrar uma solução, se o número de objetos aumentar. No entanto, ao aplicar o método quântico QAOA, o resultado para muitos itens pode ser encontrado em um tempo hábil.

Palavras-chave: Limites físicos, computação quântica, superposição, emaranhamento, vantagem quântica.

ABSTRACT

Moore's Law, proposed by Gordon Moore in 1965, states that the number of transistors in integrated circuits doubles every two years, driving technological advancement. However, miniaturization faces physical limits, as quantum effects emerge when transistors become smaller. As an alternative, quantum computing has emerged, leveraging properties such as superposition and entanglement to overcome these limitations. Initiated by Richard Feynman in 1982, quantum computing utilizes qubits, which can exist in multiple states simultaneously, enabling exponentially faster processing than classical computers. Currently, there are at least two dozen active quantum computers, and optimization problems are the most promising for demonstrating quantum advantage. One such problem with various applications is the knapsack problem, which can become extremely time-consuming to solve as the number of objects increases. However, by applying the quantum QAOA method, solutions for many items can be found within a reasonable time frame.

Keywords: Physical limits, quantum computing, superposition, entanglement, quantum advantage.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação em forma de circuito da porta lógica AND.....	16
Figura 2 – Representação de um circuito quântico.....	19
Figura 3 – Representação de um circuito quântico com o símbolo de medição.	20
Figura 4 – Implementação dos itens com seus valores.	24
Figura 5 – Implementação dos itens com seus pesos.....	24
Figura 6 – Circuito para implementação do QAOA.	28
Figura 7 – Gráfico que mostra o tempo para o computador clássico.....	29
Figura 8 – Gráfico que mostra o tempo para o computador quântico.	30
Figura 9 – Gráfico que compara o tempo para o computador clássico e quântico.....	30

LISTA DE TABELAS

Tabela I.....	14
Tabela II.	16
Tabela III.....	16
Tabela IV.....	17
Tabela V.	26
Tabela VI.....	30
Tabela VII.....	31

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	JUSTIFICATIVA.....	4
1.1.1	RELEVÂNCIA PRÁTICA.....	4
1.1.2	RELEVÂNCIA TEÓRICA.....	5
1.1.3	CONTRIBUIÇÕES ESPERADAS	5
1.2	OBJETIVO GERAL	6
1.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	6
2	TRABALHOS CORRELATOS	7
2.1	QUANTUM COMPUTING FOR ENERGY SYSTEMS OPTIMIZATION: CHALLENGES AND OPPORTUNITIES	7
2.2	QUANTUM MAXIMUM POWER POINT TRACKING (QMPPT) FOR OPTIMAL SOLAR ENERGY EXTRACTION.....	8
2.3	LIMITATIONS OF OPTIMIZATION ALGORITHMS ON NOISY QUANTUM DEVICES	9
2.4	QUANTUM COMPUTING TECHNIQUES FOR MULTI-KNAPSACK PROBLEMS	10
2.5	QUANTUM-INSPIRED EVOLUTIONARY ALGORITHM FOR DIFFICULT KNAPSACK PROBLEMS	11
2.6	QUANTUM BRIDGE ANALYTICS I: A TUTORIAL ON FORMULATING AND USING QUBO MODELS.....	12
2.7	QUANTUM FINANCE: UM TUTORIAL DE COMPUTAÇÃO QUÂNTICA APLICADA AO MERCADO FINANCEIRO	13
3	COMPUTAÇÃO QUÂNTICA.....	14
3.1	BITS E QUBITS	14
3.2	PORTAS LÓGICAS CLÁSSICAS.....	15
3.2.1	PORTA AND.....	15
3.2.1	PORTA OR.....	16
3.2.1	PORTA NOT	17
3.3	PORTAS LÓGICAS QUÂNTICAS	17
3.3.1	PORTAS DE 1-QUBIT	20

3.3.1	PORTA IDENTIDADE.....	20
3.3.1	PORTA NOT OU PAULI-X	20
3.3.1	PORTA PAULI-Y.....	21
3.3.1	PORTA PAULI-Z.....	21
3.3.1	PORTA HADAMARD (H)	21
3.4	ERA NISQ	21
4.	METODOLOGIA	23
4.1	PROBLEMA DA MOCHILA	23
4.2	QUADRATIC UNCONSTRAINED OPTIMIZATION (QUBO)	24
4.3	QUANTUM APPROXIMATE OPTIMIZATION ALGORITHM (QAOA).....	27
5	RESULTADOS.....	29
6	CONCLUSÃO	32
7	REFERÊNCIAS	33

1 INTRODUÇÃO

A lei de Moore, proposta por Gordon Moore em 1965, observa que o número de transistores em um circuito integrado dobra aproximadamente a cada 2 anos, resultando em um aumento exponencial no poder de processamento dos computadores e na redução de custos de fabricação (SCHALLER, 1997). Essa tendência tem sido um dos principais motivos por trás da evolução tecnológica nas últimas décadas. Entretanto, um empecilho significativo relacionado a essa lei é o limite físico da miniaturização; à medida em que os transistores se tornam menores, os efeitos quânticos devem ser levados em consideração e com isso surgem novos desafios. Em resposta a esses desafios, a computação quântica emergiu como solução alternativa, oferecendo recursos como a superposição e o emaranhamento para contornar as limitações evidenciadas pela Lei de Moore (JOSÉ, PIQUEIRA, LOPES, 2013).

A computação quântica teve início com Richard Feynman em 1982. Segundo ele, os computadores clássicos enfrentam limitações ao tentar simular fenômenos quânticos, pois o número de variáveis aumenta exponencialmente com a complexidade do sistema (BRANDÃO, 2010). Destacou também que um computador quântico capaz de manipular qubits (bits quânticos), seria capaz de realizar simulações de maneira mais eficiente, aproveitando as propriedades quânticas citadas anteriormente (BRANDÃO, 2010).

A principal vantagem do computador quântico é o paralelismo quântico baseado na superposição coerente de estados distintos, devido ao qubit que pode assumir valores de 0 e 1 ao mesmo tempo, fazendo com que a velocidade de processamento cresça exponencialmente. Por esse motivo, problemas praticamente sem solução em computadores clássicos ou que demorariam anos para serem resolvidos, podem ser realizados em um tempo hábil no computador quântico.

Desde que Richard Feynman propôs o computador quântico, as pesquisas na área não pararam. O desafio era duplo, desenvolver o hardware e ao mesmo tempo algoritmos específicos para a computação quântica. Um dos algoritmos mais importantes nessa área foi desenvolvido por Peter Shor em 1994. Esse algoritmo quântico resolve o problema de fatoração de números grande inteiros, o que representa um avanço na área de criptografia quântica (Gerjuoy, E., 2005).

Em resposta às limitações físicas da Lei de Moore e à dificuldade de miniaturizar transistores, a computação quântica tem sido explorada como uma alternativa tecnológica avançada. A partir da década de 1980, grandes empresas como IBM, Google e Microsoft começaram a desenvolver processadores quânticos baseados em qubits, capazes de superar os

computadores clássicos em tarefas específicas. Google, com o Sycamore, e IBM, com o Quantum System One, estão entre os líderes dessa corrida tecnológica, enquanto a Microsoft busca avanços com qubits topológicos para melhorar a estabilidade dos sistemas. Segundo Roundy (2023), esses computadores exploram o paralelismo quântico, o que lhes permite processar grandes quantidades de dados simultaneamente, utilizando fenômenos como superposição e emaranhamento. Embora ainda haja desafios, como a mitigação de erros e o controle preciso dos qubits, a tecnologia promete revolucionar áreas como criptografia, inteligência artificial e simulações complexas. A computação quântica, portanto, se posiciona como uma resposta viável às limitações da miniaturização imposta pela Lei de Moore (Roundy, 2023).

Uma das áreas da computação quântica é o desenvolvimento de algoritmos quânticos. Existem vários algoritmos quânticos conhecidos, cada um com suas características e aplicações específicas. Um dos mais famosos é o Algoritmo de Grover, que é utilizado para realizar buscas não estruturadas em grandes bases de dados. O algoritmo oferece uma aceleração quadrática em relação aos algoritmos clássicos, permitindo encontrar uma solução ou item dentro de uma lista desordenada mais rapidamente. Embora seja frequentemente associado a problemas de busca, também tem implicações em várias outras áreas, incluindo otimização e criptografia.

Outro algoritmo fundamental no campo da computação quântica é o Algoritmo de Shor, que revolucionou a criptografia ao permitir a fatoração eficiente de números inteiros grandes. Este algoritmo tem uma aceleração exponencial em comparação com os melhores algoritmos clássicos conhecidos. Sua principal aplicação é na quebra de criptografia RSA, um dos métodos mais utilizados para a segurança de dados. O algoritmo de Shor utiliza a transformada quântica de Fourier para resolver o problema da fatoração em tempo polinomial, algo impossível de alcançar com métodos clássicos para números grandes.

Atualmente, a computação quântica tem sido aplicada para resolver problemas de otimização combinatória, tais como, problema do corte máximo, problema do caixeiro viajante, problema da mochila, dentre outros (LUCAS, 2014). Neste trabalho será resolvido o problema da mochila. O problema da mochila em geral consiste em selecionar um subconjunto de itens, cada um com um peso e um valor, a fim de maximizar o valor total sem exceder a capacidade de uma mochila. Vale destacar algumas aplicações dessa abordagem.

- Otimização de Cadeias de Suprimentos: É utilizado para otimizar processos complexos em cadeias de suprimentos, onde produtos precisam ser alocados de maneira eficiente em uma rede de fabricação global, levando em conta a capacidade dos recursos e a

demanda do cliente. Essa aplicação é crucial para aumentar a eficiência operacional e a sustentabilidade.

- **Gestão de Portfólios:** No contexto financeiro, o problema da mochila pode ser utilizado para escolher os melhores ativos a serem incluídos em um portfólio, maximizando o retorno enquanto respeita as restrições de risco e capacidade de investimento.
- **Planejamento de Recursos e Operações Comerciais:** O problema ajuda a decidir a alocação de recursos em diversas operações comerciais, como planejamento de capacidade de armazéns, otimização de transporte e alocação de mão-de-obra.

Há uma variedade de algoritmos voltados para otimização, que são chamados de *variational quantum algorithms* (VAQ). Aqui nesse trabalho será destacado o *Quantum Approximate Optimization Algorithm* (QAOA), que é um algoritmo quântico projetado para resolver problemas de otimização combinatória. Ele se baseia na mecânica quântica para encontrar boas soluções aproximadas para problemas que, em sua versão clássica, são difíceis de resolver exatamente (CANABARRO, 2022; FARHI, 2014). O QAOA funciona aplicando uma sequência de operadores quânticos que alternam entre um Hamiltoniano de custo, que codifica o problema a ser resolvido, e um Hamiltoniano de mistura, que ajuda a explorar diferentes estados possíveis. Esse processo é repetido várias vezes para refinar a solução, e sua performance melhora conforme o número de camadas de operações cresce. O QAOA é promissor para problemas como o Problema da Mochila, a otimização de grafos e até mesmo para questões logísticas e de planejamento.

Atualmente, há cerca de duas dezenas de computadores quânticos em operação. A maioria dos hardwares quânticos podem ser acessados na nuvem. Segue uma lista com alguns computadores quânticos disponíveis: D-Wave, IBM, QuEra, Google, Rigetti, IQM, Intel, Xanadu, Atos, Microsoft, AQT, Anyon, Atom Computing, Diraq, EeroQ, Infleqtion, IonQ, Nord Quantique, ORCA Computing, Oxford Ionics, PASQAL, Photonic Inc, Planq, PsiQuantum, Quantinuum. Há diversas tecnologias usadas para o desenvolvimento dos computadores quânticos, mas ainda não foi definido qual a melhor para construir um *hardware* universal, ou seja, que resolva qualquer tipo de problema. Segue uma lista das técnicas mais usadas: *Quantum annealing, superconducting, trapped ions, topological qubits, photons e silicon qubits* (LADD, 2010).

Alguns computadores são desenvolvidos para resolver uma classe específica de problemas, por exemplo, o computador da D-Wave é melhor para otimização, o da Xanadu resolve melhor os problemas de química e o computador da IBM tem o propósito de ser universal. A proposta é que a abordagem quântica possa superar as limitações dos métodos

clássicos, contribuindo para avanços significativos em áreas que demandam soluções eficientes e inovadoras.

Nesse trabalho será usado o computador da Xanadu, pois além de ser gratuito, possui uma biblioteca Python bem completa e é de fácil acesso. Apesar de ser um computador voltado para problemas de química, resolve bem os problemas de otimização usando o método *Quantum Approximate Optimization Algorithm* (QAOA) (ARRAZOLA, 2023). De fato, para problemas de otimização o computador da D-Wave é o melhor, no entanto, este computador não está disponível no Brasil.

1.1 JUSTIFICATIVA

Este trabalho fundamenta-se em aspectos práticos e teóricos. No âmbito prático, destaca-se a importância da exploração dos fundamentos da computação quântica, bem como a realização de testes comparativos com computadores clássicos. Essa análise comparativa é essencial para verificar a eficácia dos algoritmos quânticos na resolução de problemas complexos, como o problema da mochila, evidenciando a redução significativa no tempo de processamento em áreas que demandam soluções rápidas e eficientes, tais como otimização e análise de dados.

Sob a perspectiva teórica, este estudo contribui para o aprimoramento do conhecimento sobre computação quântica e seus princípios fundamentais, proporcionando uma compreensão aprofundada de fenômenos quânticos, como superposição e emaranhamento, além de esclarecer as diferenças metodológicas entre algoritmos quânticos e clássicos. Ademais, espera-se que esta pesquisa não apenas demonstre as capacidades atuais dos computadores quânticos, mas também utilize um algoritmo específico para essa tecnologia, aplicando-o na resolução de um problema de otimização. Dessa forma, o estudo visa incentivar o desenvolvimento de novas aplicações e contribuir para o avanço contínuo do conhecimento na área. Assim, a realização deste trabalho justifica-se pela necessidade de investigar as potencialidades da computação quântica em relação às abordagens clássicas, destacando suas vantagens e identificando as limitações ainda existentes.

1.1.1 Relevância Prática

A relevância prática deste trabalho é significativa, pois busca não apenas explorar os fundamentos da computação quântica, mas também realizar testes comparativos em computadores quânticos e clássicos. Através dessas comparações, pretendemos verificar a eficácia dos algoritmos quânticos na resolução de problemas reais, destacando como eles

podem reduzir o tempo de processamento. Essa análise é crucial para entender o potencial da computação quântica em aplicações práticas, especialmente em áreas que demandam soluções rápidas e eficientes, como otimização, análise de dados e simulações complexas. Ao demonstrar as vantagens dos algoritmos quânticos, este trabalho contribui para o avanço do conhecimento na área e para a promoção de novas aplicações que aproveitem as capacidades únicas da computação quântica.

1.1.2 Relevância Teórica

A relevância teórica deste estudo reside na contribuição para o aprofundamento do conhecimento sobre a computação quântica e seus princípios fundamentais. Ao realizar uma análise detalhada dos algoritmos quânticos e suas comparações com algoritmos clássicos, o trabalho pretende explicar as diferenças metodológicas e os fundamentos matemáticos que sustentam a eficácia da computação quântica.

Esse estudo permite uma melhor compreensão dos fenômenos quânticos envolvidos, como superposição e emaranhamento. Além disso, ao identificar e formalizar condições em que os algoritmos quânticos se mostram superiores, o trabalho pode servir como base teórica para futuras pesquisas e desenvolvimentos na área, estimulando a inovação e a aplicação prática de conceitos quânticos.

1.1.3 Contribuições Esperadas

As contribuições esperadas incluem a divulgação do que os computadores quânticos são capazes de fazer atualmente, a apresentação de um algoritmo que foi desenvolvido exclusivamente para a computação quântica, e a solução de um problema de otimização real em um computador quântico.

Além disso, espera-se que este estudo não apenas demonstre a viabilidade prática da computação quântica, mas também funcione como base para futuros estudos. Os resultados obtidos podem incentivar o desenvolvimento de novas aplicações para os computadores quânticos da atualidade, promovendo um avanço contínuo no conhecimento da tecnologia quântica. Dessa forma, o trabalho pode contribuir para o fortalecimento da pesquisa em computação quântica e sua integração em diversos campos de estudo e prática.

1.2 OBJETIVO GERAL

Resolver o problema da mochila utilizando o algoritmo QAOA no computador quântico Xanadu.

1.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Explicar os princípios básicos da computação quântica.
- Destacar os principais computadores quânticos da atualidade.
- Apresentar o método QAOA, que foi desenvolvido para resolver problemas de otimização combinatória em computadores quânticos.
- Detalhar a implementação de um algoritmo de otimização em um computador quântico real.

2 TRABALHOS CORRELATOS

Durante a revisão de trabalhos correlatos, foram identificados artigos que tratam de diversos aspectos da computação quântica, como modelos de algoritmos para resolução de problemas de otimização e quais computadores que são utilizados nesses algoritmos. A análise desses trabalhos forneceu importantes contribuições, permitindo uma compreensão mais aprofundada das linguagens e ferramentas disponíveis, além de destacar casos de uso relevantes entre a computação quântica e a clássica.

2.1 *Quantum Computing for Energy Systems Optimization: Challenges and Opportunities*

O artigo "*Quantum computing for energy systems optimization: Challenges and opportunities*" (AJAGEKAR, 219) explora as aplicações da computação quântica na otimização de sistemas de energia, abordando tanto suas promessas quanto os desafios enfrentados. O objetivo principal é apresentar a computação quântica como uma área emergente voltada para a otimização, discutindo suas implicações práticas e os problemas que podem ser resolvidos, como alocação de localização de instalações, compromisso de unidades em sistemas elétricos e síntese de redes de trocadores de calor.

Este trabalho compara a operação dos computadores quânticos com os clássicos, ressaltando suas diferenças fundamentadas na física quântica, que conferem vantagens ao lidar com problemas de otimização complexos. Além disso, é apresentado um estudo comparativo que analisa o tempo e a qualidade das soluções obtidas por meio de abordagens quânticas em contraste com os melhores métodos clássicos, revelando que, embora os computadores quânticos apresentem potencial para superar limitações, as abordagens clássicas personalizadas ainda podem ser mais eficazes em determinados contextos.

Outro tema destacado é sobre as limitações atuais da computação quântica, como as questões relacionadas à arquitetura de hardware e a necessidade de mitigar erros, apontando que, apesar das vantagens percebidas da computação quântica, desafios tecnológicos significativos ainda persistem.

Por fim, conclui-se que a computação quântica está em uma fase inicial de desenvolvimento, e que abordagens híbridas que integrem recursos quânticos e clássicos têm potencial para representar avanços significativos na solução de problemas complexos de otimização em sistemas de energia, enfatizando a necessidade de pesquisas futuras focadas no desenvolvimento de algoritmos e tecnologias específicas. Vale destacar que mesmo depois de

6 anos da publicação desse artigo, a computação quântica ainda continua com algumas dessas limitações, no entanto, alguns avanços já foram realizados.

2.2 Quantum Maximum Power Point Tracking (Qmppt) for Optimal Solar Energy Extraction

Este artigo investiga a utilização de um algoritmo de otimização quântica, denominado *Quantum Particle Swarm Optimization* (QPSO), como uma abordagem inovadora para o rastreamento do ponto de máxima potência (MPPT) em sistemas de energia fotovoltaica (PV) (FERAOUN, 2024). A energia solar é reconhecida como uma fonte de energia sustentável que pode contribuir para a redução das emissões de gases de efeito estufa, mas a otimização da sua geração requer métodos eficientes que considerem parâmetros diversos como irradiação solar, sombreamento e limitações físicas das placas solares.

Os métodos clássicos de MPPT, como a otimização por enxame de partículas (PSO), foram amplamente utilizados e refinados, mas a introdução de algoritmos quânticos promete alcançar novos níveis de desempenho, especialmente em implementações em tempo real. No estudo, as performances dos algoritmos clássico e quântico foram avaliadas em três condições de operação principais: normais, altas temperaturas e sombreamento parcial, representando cenários ambientais que impactam a eficiência na geração de energia solar. Os resultados mostraram que o algoritmo clássico obteve uma produção de energia 0,15% superior ao quântico sob condições normais; no entanto, o algoritmo quântico demonstrou um desempenho superior, gerando 3,33% mais energia em testes realizados em altas temperaturas e 0,89% mais em condições de sombreamento parcial.

Além disso, o QPSO apresentou ciclos de trabalho inferiores nas três condições testadas, o que sugere uma maior eficiência sob condições desafiadoras. O estudo destaca a relevância de considerar as condições ambientais na escolha do algoritmo de MPPT, dado que os resultados indicam que, em situações adversas, como altas temperaturas ou sombreamento, a abordagem quântica pode levar a melhorias significativas na extração de energia. Ao discutir a evolução da computação quântica, o artigo também aborda como ela reduz o tempo de execução e o consumo de energia em comparação com a computação clássica, aumentando assim o interesse comercial e de segurança nacional na tecnologia.

Ao final, a pesquisa conclui que a combinação do QPSO com as características das condições ambientais pode resultar em soluções mais robustas e adaptáveis para maximizar a produção de energia, estabelecendo um paralelo entre os avanços no campo da nanotecnologia e os desafios enfrentados pela computação clássica.

2.3 *Limitations of Optimization Algorithms on Noisy Quantum Devices*

O artigo aborda as limitações dos algoritmos de otimização em dispositivos quânticos ruidosos, com foco em como esses dispositivos se comparam aos computadores clássicos em termos de desempenho em problemas práticos (FRANÇA, 2021). Os autores propõem uma nova técnica que estabelece condições suficientes para determinar quando um dispositivo quântico, sob influência de ruído, não consegue superar um algoritmo clássico na otimização de uma função de custo. Essa técnica inclui uma combinação de métodos de convergência de entropia relativa, otimização espelhada e resultados sobre amostragem eficiente do estado de Gibbs. As ferramentas desenvolvidas permitem uma análise rigorosa e são adaptáveis a uma ampla variedade de problemas, modelos de ruído e arquiteturas computacionais.

Os pesquisadores aplicam suas metodologias para examinar o impacto do ruído local em circuitos quânticos voltados para resolver modelos clássicos de *Ising*, que estão relacionados a problemas de otimização NP-completos, e em *solvers* quânticos variacionais para Hamiltonianos locais. O estudo revela que, para problemas de otimização clássicos, os dispositivos quânticos de curto prazo provavelmente não conseguirão oferecer vantagens significativas, a menos que as taxas de ruído atuais sejam reduzidas drasticamente ou que a topologia do problema esteja alinhada com a arquitetura do dispositivo quântico. Constatam que, mesmo com um aumento substancial no número de qubits, a obtenção de uma vantagem quântica é improvável sem uma diminuição correspondente nas taxas de erro quântico.

Os resultados também discutem como, para sistemas críticos que apresentam longas extensões de correlação, a otimização de algoritmos quânticos como VQE (*Variational Quantum Eigensolver*) e QAOA (*Quantum Approximate Optimization Algorithm*) é desafiadora e pode não apresentar avanços significativos antes de alcançarem profundidades proporcionais ao tamanho do sistema. Por outro lado, sistemas com energia gap (lacuna) tendem a permitir uma convergência exponencial desde pequenas profundidades no estado sem ruído.

Os autores concluem que é mais realista esperar que computadores quânticos ruidosos lidem com estados de baixa extensão de correlação, onde as técnicas clássicas de simulação, como redes tensoriais, se destacam. Além disso, sugerem que os esforços futuros devem se concentrar na preparação sequencial de estados quânticos, que poderia ser mais eficaz do que a abordagem tradicional baseada em circuitos. Em suma, o artigo fornece um quadro abrangente para quantificar os efeitos do ruído em dispositivos quânticos atuais e apresenta uma análise crítica sobre a viabilidade de uma vantagem quântica em problemas de otimização clássica, enfatizando a necessidade de ajustes significativos na arquitetura e nas condições de operação dos dispositivos quânticos para que possam competir efetivamente com métodos clássicos.

2.4 Quantum Computing Techniques for Multi-Knapsack Problems

O artigo "*Quantum Computing Techniques for Multi-Knapsack Problems*" (AWASTHI, 2023) oferece uma investigação aprofundada sobre as abordagens de computação quântica aplicadas ao problema de otimização conhecido como *multi-knapsack*, que é amplamente encontrado em diversas indústrias para resolver problemas complexos de alocação de recursos. O problema da mochila em geral consiste em selecionar um subconjunto de itens, cada um com um peso e um valor, a fim de maximizar o valor total sem exceder a capacidade de uma mochila. O desafio se intensifica na versão *multi-knapsack*, onde múltiplas mochilas devem ser consideradas, e cada item pode ter um valor diferente em cada mochila, tornando o problema NP-hard.

Os autores analisam como a computação quântica pode representar uma nova abordagem para problemas de otimização, permitindo soluções mais rápidas para certas classes de problemas. O estudo examina algoritmos quânticos significativos, incluindo o *Quantum Approximate Optimization Algorithm* (QAOA), *Variational Quantum Eigensolver* (VQE) e técnicas de recozimento quântico (*quantum annealing*), oferecendo uma comparação detalhada de seu desempenho sob diferentes configurações de hiperparâmetros.

Um dos focos principais da pesquisa é a técnica de “*warm-starting*” do QAOA, que envolve utilizar uma solução inicial gerada por um método clássico para melhorar o desempenho do algoritmo quântico. Os resultados indicam que essa abordagem pode levar a uma performance superior, destacando a relevância de considerar a inicialização das soluções em algoritmos de otimização quântica.

O artigo também descreve a modelagem do problema *multi-knapsack* em termos de seu equivalente de otimização de programação quadrática binária (QUBO), detalhando as restrições e objetivos envolvidos na alocação de itens a mochilas de forma a maximizar seus valores totais sem ultrapassar as capacidades definidas.

Além disso, os autores discutem as implicações dos resultados obtidos, sublinhando a necessidade de benchmarks que englobem diversas estratégias quânticas. Ao contrário de outros estudos que se concentram em apenas um tipo de algoritmo, este trabalho busca proporcionar uma visão holística do desempenho de várias abordagens quânticas na resolução de um problema que possui uma relevância considerável na prática industrial, como otimização de cadeias de suprimento.

Os autores concluem que, apesar do potencial promissor da computação quântica, existem obstáculos significativos relacionados à qualidade do hardware quântico e à necessidade contínua de desenvolver algoritmos de otimização quântica mais eficazes,

especialmente para problemas complexos como o *multi-knapsack*. Em última análise, o estudo não apenas destaca a demanda por hardware quântico mais avançado, mas também enfatiza a urgência em melhorar as metodologias de otimização quântica, criando uma base sólida para futuras aplicações industriais e contribuindo para um melhor entendimento das capacidades da computação quântica na resolução de problemas desafiadores.

2.5 Quantum-Inspired Evolutionary Algorithm for Difficult Knapsack Problems

O artigo investiga algoritmos evolutivos inspirados em conceitos quânticos, mais especificamente o *Quantum-Inspired Evolutionary Algorithm* (QIEA), aplicando-o a problemas de mochila difíceis (DKPs) (PATVARDHAN, 2015). Este problema é relevante em diversos contextos do mundo real, como alocação de recursos financeiros e seleção de investimentos. O QIEA, e sua versão aprimorada conhecida como QIEA-PSA, são projetados para superar as limitações de algoritmos tradicionais ao abordar instâncias grandes e complexas do problema.

O estudo inicia-se revisando a evolução dos algoritmos exatos para resolver problemas de mochila desde a década de 1970, destacando que o problema é P-completo e, portanto, desafiador para abordagens computacionais em tempo polinomial. Os autores implementaram o QIEA-PSA, que incorpora modificações estratégicas, incluindo a inicialização de indivíduos qubit através de heurísticas, uma reparação dos indivíduos colapsados e redução do tamanho do problema ao longo das gerações. Essas inovações são fundamentais para melhorar tanto a qualidade da solução quanto o tempo de convergência, permitindo que o algoritmo lide com tamanhos de instâncias muito superiores a 10.000 itens, que é um limite frequentemente observado em pesquisas anteriores.

Os resultados experimentais demonstram que o QIEA-PSA supera o desempenho do QIEA convencional, resolvendo instâncias com até 290.000 variáveis de forma eficaz. A análise comparativa com implementações paralelas de algoritmos exatos revela que a abordagem proposta não apenas é competitiva, mas muitas vezes fornece soluções em um tempo significativamente menor. Os autores observam que a combinação da inicialização da população e da redução de tamanho contribui para uma convergência mais rápida e eficiente. Além disso, o QIEA-PSA apresentou sucesso em termos de taxa de sucesso e qualidade das soluções quando comparado a métodos de otimização baseados em enxame de partículas.

O artigo conclui que as técnicas desenvolvidas para o QIEA-PSA são potencialmente aplicáveis a outros problemas de otimização, sugerindo que futuras pesquisas poderiam explorar a generalização destas abordagens a outras áreas. Além disso, o estudo incentiva o desenvolvimento de algoritmos evolutivos que utilizem as inovações propostas para melhor

desempenho em problemas de complexidade similar ou em contextos diferentes, ampliando, assim, a aplicação prática da metodologia apresentada. A pesquisa não apenas avança a literatura sobre algoritmos evolução, mas também abre novas direções para exploração no campo da otimização combinatorial.

2.6 Quantum Bridge Analytics I: A Tutorial On Formulating and Using Qubo Models

O artigo fornece uma visão detalhada sobre o modelo QUBO (*Quadratic Unconstrained Binary Optimization*), destacando sua importância e aplicações nas áreas de otimização combinatorial e computação quântica (GLOVER, 2022). O modelo é descrito como uma combinação de variáveis binárias e uma matriz de custos, permitindo representar uma ampla gama de problemas de otimização de forma eficaz. O QUBO se destaca pela sua flexibilidade, podendo abarcar desde questões simples de alocação até problemas complexos como o corte máximo e coloração de grafos, além de ser equacionado como modelo de *Ising*, um conceito importante na física.

A formulação de problemas em QUBO exige a identificação das variáveis adequadas e a construção da matriz de custo, que encapsula as interações desses problemas. O artigo julga que essa estrutura não apenas facilita a modelagem de problemas clássicos, mas também introduz a possibilidade de reformulação de problemas não binários utilizando funções de penalização, contribuindo para a naturalidade com que os problemas podem ser convertidos em um formato QUBO.

Outro ponto significativo é a conexão do modelo com a computação quântica. O QUBO se torna uma base para técnicas de recozimento quântico, que são utilizadas para explorar soluções otimizadas em sistemas quânticos, como os desenvolvidos pela D-Wave Systems. A pesquisa em métodos híbridos que combinam técnicas quânticas e clássicas está em ascensão, e o artigo menciona que isto pode trazer melhorias significativas na resolução de problemas complexos.

Por fim, o artigo enfatiza a importância contínua do modelo QUBO, tanto no contexto da computação clássica quanto quântica, prevendo que a crescente influência dessas tecnologias irá levar a um aumento na aplicação de QUBO em diversas áreas, incluindo operações na indústria, ciência da computação e engenharia. Dessa forma, o QUBO responde às necessidades contemporâneas de desafios em otimização, abrindo novos caminhos para soluções algorítmicamente robustas e eficientes.

2.7 *Quantum Finance*: Um Tutorial de Computação Quântica Aplicada Ao Mercado Financeiro

O artigo "*Quantum Finance*: um tutorial de computação quântica aplicada ao mercado financeiro" (CANABARRO, 2022) oferece uma introdução aos fundamentos da computação quântica, enfatizando sua aplicabilidade em problemas financeiros, especialmente a otimização de portfólio. A computação quântica, inicialmente confinada ao domínio da física teórica, tem emergido como um campo promissor devido às suas aplicações em otimização, aprendizado de máquina, segurança da informação e simulações. O texto destaca o *Quantum Approximate Optimization Algorithm* (QAOA) como uma ferramenta central para abordar o problema de otimização de portfólio, que consiste em selecionar e ponderar ativos financeiros de maneira a maximizar retornos e minimizar riscos.

Dentro do artigo, os autores exploram como o QAOA pode ser implementado para resolver questões complexas de otimização combinatória no mercado financeiro, utilizando exemplos práticos com ativos disponíveis na bolsa brasileira. Eles discutem a matemática subjacente ao problema, bem como as restrições que tornam a otimização desafiadora, como a positividade dos ativos e limites de investimento. Os resultados são analisados utilizando o simulador quântico ATOS QLM do SENAI/CIMATEC. Os autores fornecem também códigos que podem ser utilizados em um Jupyter Notebook, permitindo a exploração prática dos conceitos abordados.

Além de apresentar os principais conceitos e ferramentas quânticas, o artigo ressalta a importância de um maior envolvimento da academia com o setor privado no Brasil, sugerindo que a ciência quântica pode desempenhar um papel significativo no desenvolvimento tecnológico do século 21. Por fim, os autores expressam sua esperança de que a pesquisa em finanças quânticas avance, contribuindo para a capacidade do Brasil de liderar neste campo emergente, que ainda está nos seus estágios iniciais de exploração e implementação.

3 COMPUTAÇÃO QUÂNTICA

Neste capítulo é apresentado um breve resumo dos conceitos fundamentais da computação quântica. Para que a abordagem seja mais didática, os conceitos da computação clássica também são apresentados.

3.1 Bits e Qubits

Um bit ou dígito binário (*binary digit*), é a unidade básica que os computadores e sistemas digitais utilizam para trabalhar, ele pode assumir apenas dois valores, 0 ou 1. Um byte é uma sequência de 8 bits.

Fisicamente, um bit pode ser representado de várias formas: através de dois valores de voltagem aplicados num fio, diferentes direções de magnetização em uma fita magnética, entre outras. O importante é que seja possível identificar dois estados diferentes.

Como um bit só pode assumir dois valores (0 ou 1), só será possível representar exatamente dois estados distintos. Na Tabela 1 há exemplos de como podemos associar significados aos valores do bit.

Por exemplo, em um sistema com trava eletrônica, o valor 0 poderia indicar que a porta estava fechada, enquanto 1 indicaria que a porta está aberta. Em outro sistema que registra o estado civil, 0 poderia representar Solteiro, enquanto 1 seria Casado.

Tabela I

Bit	Porta	Lâmpada	Sexo	Detector de Movimento	Estado Civil
0	Fechada	Desligada	Masculino	Sem Movimento	Solteiro
1	Aberta	Ligada	Feminino	Com Movimento	Casado

A unidade básica de memória de um computador quântico é o qubit (*quantum bit*). Ao contrário de um bit clássico, que pode assumir apenas os valores 0 ou 1, um qubit pode existir em uma superposição de estados, o que significa que ele pode representar simultaneamente uma combinação de 0 e 1. Essa propriedade é uma das características fundamentais da computação quântica (PORTUGAL, 2019).

O estado de um qubit é representado por um vetor em um espaço vetorial complexo bidimensional. Esse vetor é chamado de vetor de estado e tem norma 1 (é normalizado). Os estados básicos de um qubit, correspondentes aos valores clássicos 0 e 1, são denotados por:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Um estado geral de um qubit pode ser escrito como uma combinação linear desses estados básicos:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (3)$$

Sendo α e β são números complexos chamados de amplitudes de probabilidade.

A norma do vetor de estado deve ser 1, ou seja, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Interpretação física:

A amplitude α está associada à probabilidade de medir o qubit no estado $|0\rangle$.

A amplitude β está associada à probabilidade de medir o qubit no estado $|1\rangle$.

Quando uma medição é realizada, o qubit "colapsa" para um dos estados clássicos ($|0\rangle$ ou $|1\rangle$) com probabilidades dadas por $|\alpha|^2$ e $|\beta|^2$, respectivamente.

A coexistência quântica é representada matematicamente pela superposição de estados ortogonais. Por exemplo, o estado $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ representa a coexistência dos estados antes da $|0\rangle$ e $|1\rangle$ medição. Essa superposição é uma das bases para o poder da computação quântica, pois permite que operações sejam realizadas em múltiplos estados simultaneamente.

Por exemplo:

Um estado comum em computação quântica é o estado de superposição uniforme:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \quad (4)$$

Nesse caso, a probabilidade de medir $|0\rangle$ ou $|1\rangle$ é a mesma: $|\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = \frac{1}{2}$.

3.2 Portas Lógicas Clássicas

A computação clássica funciona através da ativação das portas lógicas. Uma porta lógica é uma função $f: \{0,1\}^m \rightarrow \{0,1\}^n$ com m bits de *input* e n bits de *output*. A seguir descreveremos as principais portas lógicas clássicas (ALMEIDA, 2023).

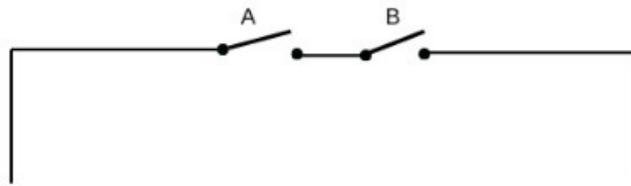
3.2.1 Porta AND

Essa porta é composta por duas entradas e uma saída, e é representada pela função:

$$f(x, y) = x \cdot y \quad (5)$$

Classicamente "0" e "1" são associados aos estados "ligado" e "desligado" de um circuito, como mostra a figura 1.

Figura 1: Representação em forma de circuito da porta lógica AND



Fonte: Autor

O bit clássico “0” (“1”) pode ser representado pela chave ligada (desligada) de um circuito elétrico. Para a porta lógica AND, a corrente passa somente se as chaves A e B estão ligadas. A partir da análise do circuito da Figura podemos construir a seguinte tabela da verdade (Tabela II):

Tabela II

Entrada		Saída
x	y	$f(x, y) = x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3.2.2 Porta OR

A porta “OR” (“OU”) é representada pela função $f(x, y) = x + y$, lembrando que essa é uma soma de 0 e 1 na álgebra booleana. Segue a tabela da verdade (Tabela III).

Tabela III

Entrada		Saída
x	y	$f(x, y) = x + y$
0	0	0
0	1	1

1	0	1
1	1	1

3.2.3 Porta NOT

Dada uma entrada x , a porta NOT inverte ou nega x , resultando “não x ” (\bar{x}). Segue a tabela da verdade (Tabela IV):

Tabela IV

Entrada	Saída
x	$f(x) = \bar{x}$
1	0
0	1

Há outras portas lógicas clássicas, no entanto, foi listado aqui apenas essas três com objetivo de deixar o conteúdo mais didático. Neste trabalho, será destacado o caso quântico.

3.3 Portas Lógicas quânticas

O modelo de computação quântica de circuitos, que é considerado aqui, é análogo com as portas lógicas da computação clássica. O processamento do qubit, ou seja, da informação quântica, é feito pela evolução temporal do estado inicial do sistema. A leitura do resultado é feita somente no final do processamento, quando uma medição, geralmente na base computacional, é realizada (ALMEIDA, 2023).

As portas lógicas quânticas são componentes fundamentais na computação quântica, agindo como operações que transformam o estado de qubits. Ao contrário das portas lógicas clássicas, que operam em bits e manipulam estados binários, as portas quânticas exploram os fundamentos da mecânica quântica, permitindo que um qubit exista em diversas combinações de 0 e 1 simultaneamente.

Cada porta lógica quântica é representada por uma matriz unitária que determina como os estados dos qubits são alterados. Na computação quântica as portas quânticas são representadas por matrizes unitárias e a reversibilidade das transformações unitárias garante

que as portas quânticas sejam reversíveis, um requisito fundamental para a computação quântica (WONG, 2022).

Na mecânica quântica, a evolução de um estado quântico é descrita por transformações unitárias. Uma transformação unitária U é um operador linear que satisfaz a condição: $U^\dagger U = U U^\dagger = I$

Sendo que U^\dagger é a transposta conjugada de U , e I é o operador identidade. As transformações unitárias são reversíveis, o que significa que, para toda operação unitária U , existe uma operação inversa U^\dagger que pode reverter a transformação.

Uma porta lógica é reversível quando, dadas as saídas, pode-se determinar quais foram as entradas. Um exemplo é a porta NOT, pois ao analisar a tabela da verdade (Tabela IV), as saídas são únicas, então sempre é possível determinar as entradas.

A computação clássica frequentemente usa portas irreversíveis (por exemplo, AND, OR), onde a informação é perdida durante a computação. Em contraste, a computação quântica depende de portas reversíveis, pois as transformações unitárias são inerentemente reversíveis. Isso significa que se for aplicado uma porta lógica em um qubit duas vezes, o resultado será o qubit de entrada. Exemplos de portas quânticas reversíveis incluem: porta Pauli-X (porta NOT quântica), porta Hadamard, porta CNOT (porta NOT controlada).

A reversibilidade é crucial para preservar a coerência e a superposição dos estados quânticos durante a computação.

Ao lidarmos com n qubits, a matriz U tem dimensão $2^n \times 2^n$. Por exemplo, para dois qubits ($n = 2$) a matriz que representa o vetor de estado na base computacional tem dimensão 2^2 :

$$|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

A operação unitária sobre esse vetor de estado pode ser representada por uma matriz U : $2^2 \times 2^2$, como

$$U = \begin{pmatrix} U_{00} & U_{01} & U_{02} & U_{03} \\ U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{20} & U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{30} & U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{pmatrix} \quad (7)$$

A evolução de um estado quântico $|\psi(t)\rangle$ é governada pela equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle \quad (8)$$

H é o Hamiltoniano, um operador linear auto-adjunto (hermitiano) que representa a energia total do sistema e \hbar é a constante de Planck reduzida. Um operador é chamado de hermitiano se $H = H^\dagger$ e o símbolo de adaga (\dagger) denota que a matriz foi transposta e conjugada.

A solução formal da equação de Schrödinger é:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle \quad (9)$$

Aqui, $e^{-iHt/\hbar}$ é um operador unitário, pois H é hermitiano. Isso significa que a evolução temporal de um estado quântico é descrita por uma transformação unitária.

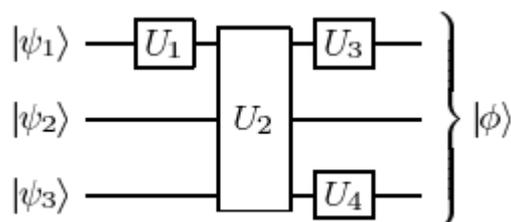
No final de uma computação quântica, uma medição é realizada para extrair informação clássica do sistema quântico. A medição colapsa o estado quântico em um dos estados da base por exemplo, $|0\rangle$ ou $|1\rangle$, com probabilidades determinadas pelos quadrados das magnitudes das amplitudes.

Dessa forma, resume-se a execução de um algoritmo quântico nos seguintes passos:

1. Preparação do estado inicial $|\psi_i\rangle$, por exemplo o estado $|0\rangle$ ou $|00\rangle$ ou $|001110\rangle$;
2. Realização das transformações unitárias U necessárias para a implementação de um dado algoritmo resultando em $|\psi_f\rangle = U|\psi_i\rangle$;
3. Realização, no fim do algoritmo, de uma medição na base computacional.

O modelo descrito acima pode ser ilustrado com a representação em circuitos. Essa representação é muito útil e amplamente usada para analisar essas transformações. Os circuitos quânticos são compostos por fios, geralmente representados como linhas, que transportam os qubits para diferentes pontos do circuito. As operações básicas são representadas como portas lógicas. A Figura 2 mostra um exemplo da representação de circuitos, segue-se a convenção usual de um estado indo da esquerda para a direita (ESCARTIN, 2011).

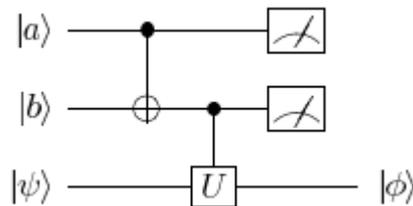
Figura 2: Representação de um circuito quântico



Fonte: ESCARTIN, 2011.

No final da linha do circuito tem o símbolo de medição cujo resultado de sua aplicação é interpretado como a probabilidade de encontrar o sistema em certo estado, como pode ser vista na figura 3.

Figura 3: Representação de um circuito quântico com o símbolo de medição



Fonte: ESCARTIN, 2011.

3.3.1 Portas de 1-qubit

Uma porta de 1-qubit na sua forma mais geral é dada por uma matriz unitária 2×2 :

$$U = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} \quad (10)$$

Que transforma o qubit $|0\rangle$ e $|1\rangle$ em $|\psi_0\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ e $|\psi_1\rangle = \gamma|0\rangle + \delta|1\rangle$, respectivamente. A seguir, será apresentado algumas portas lógicas quânticas:

3.3.2 Porta identidade

Esta porta também é conhecida como porta identidade e o resultado de sua operação não altera o estado do qubit de entrada: $I|0\rangle = |0\rangle$ e $I|1\rangle = |1\rangle$. Segue a representação matricial

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

3.3.3 Porta NOT ou Pauli-X

Sua atuação no vetor de estado, inverte o valor: $X|0\rangle = |1\rangle$ e $X|1\rangle = |0\rangle$. Segue a representação matricial.

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

3.3.4 Porta Pauli-Y

Diferentemente da Pauli-X, que age como um NOT invertendo os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$, e da Pauli-Z, que aplica uma fase ao estado $|1\rangle$, a Pauli-Y combina essas duas operações com um fator imaginário i : $Y|0\rangle = i|0\rangle - i|1\rangle$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

3.3.5 Porta Pauli-Z

A porta Z produz uma fase relativa em um estado de superposição dos qubits. É representada pela matriz:

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

3.3.6 Porta Hadamard (H)

Outra porta quântica extremamente importante que atua sobre 1 qubit é a porta Hadamard (H).

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Essa importância é devido ao fato da operação implementada pela porta Hadamard ser responsável pela criação de superposição. Considerando os estados da base computacional, a atuação da porta Hadamard resulta em:

$$H|0\rangle = |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \quad (16)$$

$$H|1\rangle = |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

3.4 Era NISQ (*Noisy Intermediate-Scale Quantum*).

Atualmente a era que nos encontramos no desenvolvimento da computação quântica é conhecida como era NISQ (*Noisy Intermediate-Scale Quantum*). Os dispositivos quânticos têm um número intermediário de qubits (entre 50 e alguns contendo mais de 1000), mas ainda estão longe de serem totalmente escaláveis e livres de erros. As principais características dessa era incluem:

Limitações de Escala: Os dispositivos NISQ não podem realizar correção de erros quânticos efetiva, o que significa que eles não podem manter estados quânticos por longos períodos sem degradação de informação, limitando a profundidade e a complexidade dos circuitos que podem ser implementados.

Aplicação Práticas: Apesar de suas limitações, os dispositivos são considerados promissores para aplicação em química quântica, simulações de sistemas quânticos, e algumas formas de otimização, com a possibilidade de superar algoritmos clássicos em problemas específicos, desde que a arquitetura se adeque ao problema e a unidade de controle do erro seja suficiente desenvolvida.

Desvio de Expectativas de Vantagem Quântica: Embora haja expectativa sobre a vantagem dos dispositivos quânticos, muitos especialistas acreditam que os dispositivos atuais precisam passar por otimizações tanto em termos de hardware quanto de algoritmos para que possam atingir uma vantagem quântica de forma consistente e em problemas de otimização práticos.

O ruído em dispositivos quânticos, refere-se a erros e distorções que ocorrem durante a execução de operações quânticas. Este ruído pode prejudicar severamente a precisão e a confiabilidade de computações quânticas. Algumas causas de ruídos são:

Decaimento de Coerência: Em sistemas quânticos, os estados são definidos por superposições que precisam ser mantidas para que a computação quântica funcione corretamente. No entanto, interações indesejadas com o ambiente externo podem causar a perda de coerência, levando à degradação dos estados quânticos.

Erros de Implementação: Durante a aplicação de portas quânticas, erros podem ocorrer devido a limitação na tecnologia de controle e precisão nos sistemas de medição. Isso pode incluir flutuações nos parâmetros de controle e incertezas nos tempos de operação das portas quânticas.

Interações Espontâneas: O sistema quântico pode interagir com outras partículas ao seu redor (fótons ou fonons), provocando transições indesejadas entre estados quânticos. Essas interações podem levar ao chamado “ruído de decoerência”.

Ruído Térmico: Em muitos dispositivos quânticos, o calor e a temperatura podem induzir flutuações nas propriedades físicas dos qubits, o que resulta em erros. O ruído térmico é particularmente relevante em dispositivos como os *annealers* quânticos, onde a temperatura deve ser controlada rigidamente.

4 METODOLOGIA

Neste capítulo é apresentado os passos para a solução do problema proposto.

4.1 Problema da Mochila

Este problema envolve um conjunto de itens, cada um com um valor e um peso, que precisam ser alocados em uma mochila com uma capacidade específica. O objetivo é maximizar o valor total dos itens colocados na mochila, respeitando a limitação do seu peso. Também é conhecido como o problema da mochila 0/1 e é classificado como NP-hard. De acordo com a teoria da complexidade computacional, problemas NP-Hard são considerados intrinsecamente difíceis. Não se conhece nenhum algoritmo eficiente (de tempo polinomial) para resolvê-los, e acredita-se que tal algoritmo possa não existir.

Há uma versão generalizada deste problema, chamada de problema da mochila múltipla, envolvendo múltiplas mochilas e diferentes valores para os itens em cada uma delas. Essa complexidade torna a resolução do problema um desafio significativo para abordagens clássicas de computação, especialmente quando aplicada a situações do mundo real, como otimização de cadeias de suprimentos, gerenciamento de portfólios, operações comerciais, entre outros. Devido à dificuldade computacional, novas abordagens como a computação quântica, estão sendo exploradas para encontrar soluções mais eficientes.

A formulação matemática do problema da mochila pode ser descrita da seguinte forma (KORTE, 2018):

Dados:

1. Um conjunto de n itens, onde cada item i tem:
 - Um peso w_i (peso do item i).
 - Um valor v_i (valor do item i).
2. Uma capacidade máxima W da mochila.

Considere x_i como uma variável binária que indica se o item i está ou não na mochila.

Se o item i foi selecionado ($x_i = 1$) ou não ($x_i = 0$).

O objetivo é maximizar o valor total dos itens na mochila:

$$\text{Maximizar } \sum_{i=1}^n v_i x_i, \quad (17)$$

Considerando que a soma dos pesos não pode exceder a capacidade máxima

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i \leq W. \quad (18)$$

A complicação desse problema é que o tempo para encontrar uma solução cresce exponencialmente de acordo com o aumento do número de itens. Há estimativas que para 50 itens, um computador comum levaria 13 anos para resolver (MONTANEZ, 2024). Neste trabalho foi resolvido o problema com 20, 21 e 22 itens.

Na Figura 4 representa a lista de itens escolhidos e os seus respectivos valores e na Figura 5 representa a lista de itens escolhidos e os seus respectivos pesos. O peso máximo suportado pela mochila é 100.

Figura 4: Implementação dos itens com seus valores

```
items_values = {
  "🏠": 8, "💻": 47, "👛": 10, "📖": 5, "🎨": 16,
  "🎮": 20, "🖥️": 30, "🎧": 15, "📱": 25, "📅": 12,
  "📷": 18, "🗑️": 22, "🔧": 28, "👕": 14, "🌊": 19,
  "🤪": 40, "🪛": 32, "🏡": 50, "🔪": 35, "🪓": 27,
  "📺": 25, "🚲": 15
}
```

Fonte: Autor

Figura 5: Implementação dos itens com seus pesos

```
items_weight = {
  "🏠": 3, "💻": 11, "👛": 14, "📖": 19, "🎨": 5,
  "🎮": 4, "🖥️": 7, "🎧": 2, "📱": 3, "📅": 6,
  "📷": 8, "🗑️": 12, "🔧": 9, "👕": 4, "🌊": 6,
  "🤪": 10, "🪛": 8, "🏡": 20, "🔪": 15, "🪓": 4,
  "📺": 9, "🚲": 7
}
```

Fonte: Autor

Para o algoritmo clássico foi utilizado programação dinâmica tendo também como linguagem de programação Python. A lista de itens, valores e pesos foram os mesmos para ambos os algoritmos.

4.2 Quadratic Unconstrained Binary Optimization (QUBO)

O método de solução do problema da mochila no computador quântico, faz uso da equação de Schrödinger e por esse motivo será necessário construir a Hamiltoniana do problema. No caso dos problemas de otimização, a função de custo é promovida à Hamiltoniana através do uso das matrizes de Pauli apresentadas anteriormente (equações 12, 13 e 14). O

método em si, que é o QAOA, será apresentado na próxima seção. Nessa parte será construído a função de custo com o modelo QUBO.

Para modelagem deste problema foi utilizado o modelo QUBO (*Quadratic Unconstrained Binary Optimization*), sendo uma abordagem comum para formular o problema de maneira que possa ser resolvido em computadores quânticos. Este modelo é definido como:

$$\text{Minimizar } f(x) = \sum_{i=1}^n Q_{ii}x_i + \sum_{i<j} Q_{ij}x_ix_j, \quad (19)$$

Sendo que:

x_i são variáveis binárias, ou seja, $x_i \in \{0,1\}$ para $i=1,2,\dots,n$.

Q_{ii} são os coeficientes lineares (termos quadráticos quando $i=j$).

Q_{ij} são os coeficientes quadráticos (interações entre as variáveis x_i e x_j).

O modelo QUBO também pode ser expresso em forma matricial como:

$$\text{Minimizar } f(x) = x^T Q x, \quad (20)$$

onde:

- x é um vetor coluna de variáveis binárias $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$.

- Q é uma matriz $n \times n$ simétrica (ou triangular superior) que contém os coeficientes Q_{ii} e Q_{ij} .

A função de custo no QUBO consiste em uma soma ponderada de termos quadráticos, em que cada termo representa uma interação entre duas variáveis ou um custo associado a uma variável individual. Como o QUBO é um modelo não restrito, restrições do problema devem ser incorporadas à função objetivo através de penalizações.

Seja $f(x)$ a função objetivo original que se deseja minimizar ou maximizar. Seja $g(x) \leq b$ uma restrição do problema. A ideia é adicionar um termo quadrático à função objetivo que penaliza soluções que violam a restrição. O termo de penalização é da forma $\lambda \cdot (g(x) - b)^2$, onde λ é um parâmetro de penalização. O parâmetro λ deve ser escolhido de forma que a penalização por violar a restrição seja maior do que qualquer benefício obtido ao incluir itens adicionais. Dessa forma, a função QUBO se torna

$$\text{Minimizar } Q(x) = f(x) + \lambda \cdot (g(x) - b)^2. \quad (21)$$

Segue um exemplo do problema da mochila de maneira simplificada para entender melhor o método. Considere 5 itens, cada um com um peso (w_i) e um valor (v_i), e uma mochila com capacidade máxima W .

Tabela V

Item (i)	Peso (w_i)	Valor (v_i)
1	2	10
2	3	15
3	5	20
4	7	25
5	1	5

A capacidade máxima da mochila W é 10. Neste caso, temos o objetivo a ser alcançado:

$$\text{Maximizar } \sum_{i=1}^5 v_i x_i = 10x_1 + 15x_2 + 20x_3 + 25x_4 + 5x_5. \quad (22)$$

No entanto, há uma restrição. A soma dos pesos dos itens na mochila não pode exceder a capacidade máxima $W=10$:

$$\sum_{i=1}^5 w_i x_i = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 1x_5 \leq 10. \quad (23)$$

Na formulação QUBO, as restrições devem ser incorporadas à função de custo. Neste caso a equação completa é dada por

$$\text{Minimizar } f(x) = -\sum_{i=1}^5 v_i x_i + \lambda \left(\sum_{i=1}^5 w_i x_i - W \right)^2, \quad (24)$$

Na equação acima, está posto a opção de minimizar em vez de maximizar. Isso acontece porque, por definição, o formato QUBO é um problema de minimização, então, adiciona-se um sinal de menos na função que descreve o problema da mochila. Ao substituir os valores numéricos, obtém-se a seguinte equação

$$f(x) = -10x_1 - 15x_2 - 20x_3 - 25x_4 - 5x_5 + \lambda(2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 1x_5 - 10)^2. \quad (25)$$

Um valor comum é $\lambda = \max(v_i) + 1$, que neste caso seria $\lambda = 26$.

A solução ótima do QUBO será a combinação de itens que minimiza $f(x)$. No caso deste exemplo, a solução ótima é:

$$x_2=1, x_3=1, x_5=1 \text{ (itens 2, 3 e 5), com valor total 40 e peso total 9.}$$

Ou $x_1=1, x_4=1, x_5=1$ (itens 1, 4 e 5), com valor total 40 e peso total 10.

4.3 Quantum Approximate Optimization Algorithm (QAOA)

O QAOA é uma abordagem no campo da computação quântica, projetada para resolver problemas de otimização combinatória. Baseia-se na manipulação quântica de estados para aproximar soluções de problemas de otimização (FARHI, 2014). É um algoritmo híbrido que combina abordagens clássicas e quânticas. Baseado no princípio adiabático, que diz que um sistema evolui lentamente, sem trocas perturbadoras com o ambiente externo. Esse método permite que o algoritmo explore estados superpostos em um espaço de solução amplo. A principal ideia é formular o problema de otimização como um Hamiltoniano, sendo que a solução ótima se relaciona à configuração do sistema quântico na fase final da evolução.

O objetivo é encontrar o estado quântico que minimiza o valor esperado da função de custo H_C :

$$\min \langle \psi | H_C | \psi \rangle. \quad (26)$$

A função H_C é o Hamiltoniano do problema, ou seja, a função de custo que foi construída com a abordagem QUBO.

A parametrização proposta pelo QAOA se baseia fundamentalmente na aplicação sucessiva de duas operações unitárias: a unitária de custo, U_C , correspondente à evolução do Hamiltoniano de custo H_C e a unitária de mistura, U_M , correspondente ao Hamiltoniano de mistura, H_M , dado por

$$H_M = \sum_{j=1}^n X_j, \quad (27)$$

Onde X_i é o operador de Pauli X (porta X) atuando no espaço do i -ésimo qubit (CANABARRO, 2022). A “duração” da evolução de cada Hamiltoniano corresponde aos parâmetros a serem otimizados. Considerando parâmetros reais e, temos as operações unitárias

- Operador de custo $U_C(\gamma) = e^{-i\gamma H_C}$.
- Operador de mistura $U_M(\beta) = e^{-i\beta H_M}$.

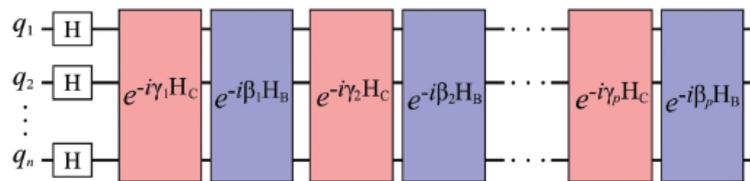
O estado final do QAOA é dado por:

$$|\psi(\vec{\gamma}, \vec{\beta})\rangle = U_M(\beta_p) U_C(\gamma_p) \cdots U_M(\beta_1) U_C(\gamma_1) |+\rangle^{\otimes n} \quad (28)$$

Sendo que $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ é o estado inicial de cada qubit, p é o número de camadas do QAOA e $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p)$ e $(\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p))$ são os parâmetros a serem otimizados.

Na Figura 6 apresentamos o circuito de implementação do QAOA. Um circuito quântico determina quais e em que ordem as chaves lógicas são aplicadas a um ou mais qubits de um sistema.

Figura 6: Circuito para implementação do QAOA.



Fonte: CANABARRO, 2022

Todos os passos desse método foram implementados no código Python usando a biblioteca do computador Xanadu, chamada de PennyLane.

Segue algumas informações sobre o método:

- **Parâmetros de Controle:** O algoritmo é conduzido por dois conjuntos de parâmetros: γ (gamma) e β (beta), que correspondem a ângulos de rotação nas operações quânticas. Estes parâmetros são ajustáveis e têm um impacto direto na qualidade da solução final.
- **Profundidade do Circuito:** O parâmetro p controla a profundidade do circuito quântico, representando o número de camadas de operações aplicadas no sistema. Um aumento em p geralmente resulta em uma solução de maior qualidade, ampliando a aproximação do valor ótimo do problema.

Este modelo pode ser descrito em etapas, como:

- **Inicialização do Estado Quântico:** O algoritmo começa com a preparação do estado base, geralmente o estado $|0\rangle$.
- **Evolução do Estado:** Um circuito quântico aplica uma série de operadores em uma sequência alternada. O operador de problema é específico no problema de otimização, ele é projetado para maximizar a divisão de um grafo em duas partes. O operador de mistura promove a superposição e a interferência entre os estados quânticos, permitindo uma exploração mais eficiente do espaço de soluções.

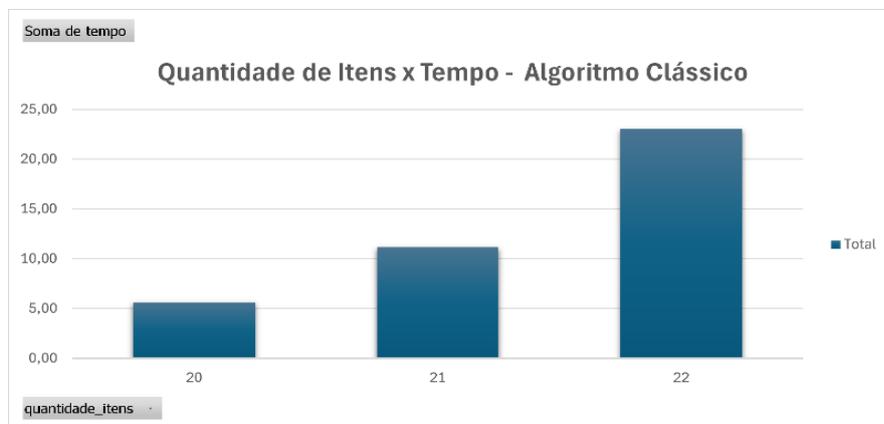
5 RESULTADOS

Para a implementação do problema da mochila, foi escolhido um algoritmo clássico e um algoritmo quântico para realizar a comparação entre ambos. A biblioteca PennyLane foi utilizada para implementar o algoritmo quântico, mais especificamente o método QAOA, enquanto o algoritmo clássico foi uma abordagem tradicional, baseada em programação dinâmica.

Devido às limitações do computador quântico disponível, foi possível realizar a execução do algoritmo quântico apenas para um número restrito de itens, com um máximo de 22 itens. Vale destacar que o desempenho de um computador quântico depende do número de qubits e como eles estão relacionados (a arquitetura).

Para o algoritmo clássico, a complexidade computacional é exponencial, ou seja, o tempo de execução cresce de forma exponencial conforme a quantidade de itens aumenta (Figura 7). Especificamente, a complexidade é de $O(2^n)$, onde n representa o número de itens. Isso significa que, à medida que o número de itens aumenta, o tempo de execução do algoritmo clássico cresce de maneira muito rápida e difícil de ser controlada.

Figura 7: Gráfico que mostra o tempo para o computador clássico



Fonte: Autor

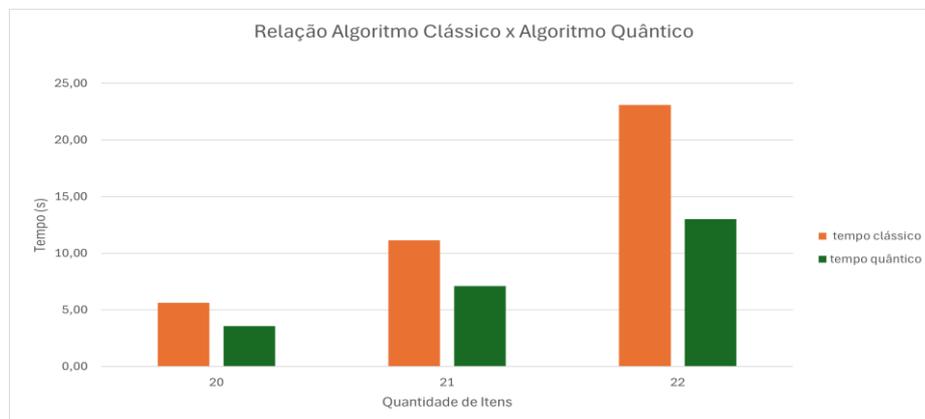
Em contrapartida, o algoritmo quântico, implementado com a biblioteca PennyLane, conseguiu manter um tempo de execução mais estável e consideravelmente mais rápido, mesmo com a limitação do número de itens (máximo de 22). Durante os testes com 20, 21 e 22 itens, o algoritmo quântico apresentou uma vantagem clara em termos de tempo de execução (Figura 8), já que o aumento na quantidade de itens não resultou em um crescimento exponencial do tempo de processamento, como observado no algoritmo clássico. Na Figura 9 consta a relação entre os dois algoritmos levando em consideração a quantidade e o tempo.

Figura 8: Gráfico que mostra o tempo para o computador quântico



Fonte: Autor

Figura 9: Gráfico que compara o tempo para o computador clássico e quântico



Fonte: Autor

Como mostrado na Tabela VI (resultado com algoritmo clássico) e na Tabela VII (resultado com o algoritmo quântico), a solução obtida por ambos os algoritmos foi idêntica, com única diferença sendo o tempo de execução entre eles.

Tabela VI

Quantidade de Itens	Solução	Valor	Peso	Tempo de Execução (s)
22		381	100	23.09

Tabela VII

Quantidade de Itens	Solução	Valor	Peso	Tempo de Execução (s)
22		381	100	13.01

Esses resultados sugerem que, apesar das limitações atuais no uso de computadores quânticos, o método QAOA, implementado com PennyLane, demonstrou um desempenho competitivo em comparação com algoritmos clássicos, especialmente no que diz respeito ao tempo de execução. Entretanto, esse resultado pode ser diferente dependendo do computador clássico e quântico usados.

Um computador comum, com maior poder de processamento, pode resolver esse problema em um tempo superior ao melhor computador quântico. A vantagem quântica para problemas reais ainda não foi alcançada (FEDOROV, 2022), porém algoritmos híbridos que fazem uso do computador clássico e quântico têm alcançado resultados superiores em relação aos puramente clássicos (AWASTHI, 2024). No entanto, trabalhos como este são fundamentais para mostrar que o uso do computador quântico para resolver problemas combinatórios de forma mais eficiente à medida que a tecnologia de computação quântica evolui.

6 CONCLUSÃO

Os resultados obtidos evidenciaram a complexidade computacional inerente ao problema da mochila e os desafios enfrentados por abordagens clássicas na busca por soluções ótimas à medida que o número de itens aumenta. A análise comparativa demonstrou que a programação dinâmica, apesar de ser uma técnica amplamente utilizada para a resolução desse tipo de problema, apresenta crescimento exponencial do tempo de execução, tornando-se inviável para instâncias de maior escala. Em contraste, o algoritmo quântico QAOA, implementado por meio da biblioteca PennyLane, demonstrou um desempenho mais eficiente, com um tempo de processamento consideravelmente reduzido, o que reforça seu potencial para problemas combinatórios complexos.

A análise dos testes com 20, 21 e 22 itens mostrou que o algoritmo quântico foi capaz de encontrar soluções coerentes e válidas, com um tempo de processamento consideravelmente menor em comparação com o algoritmo clássico. Isso reforça o potencial da computação quântica para lidar com problemas de otimização que exigem alto poder computacional. No entanto, vale ressaltar que a aplicação prática dessa tecnologia ainda enfrenta limitações, principalmente relacionadas à quantidade de qubits disponíveis e à estabilidade dos sistemas quânticos.

Outro aspecto relevante a ser destacado é que, embora o QAOA tenha se mostrado promissor para o problema da mochila, sua eficácia pode variar dependendo da estrutura do problema e das configurações do algoritmo. Além disso, a necessidade de um hardware quântico adequado para lidar com instâncias maiores ainda representa um desafio significativo.

Dessa forma, este estudo reforça a importância do desenvolvimento contínuo da computação quântica e da exploração de algoritmos híbridos, que combinam abordagens clássicas e quânticas para otimizar o desempenho. Com a evolução das arquiteturas quânticas e o aumento da disponibilidade de processadores quânticos mais robustos, espera-se que esses métodos se tornem ainda mais eficientes e viáveis para aplicações reais, impactando áreas como logística, finanças e inteligência artificial.

Por fim, os resultados obtidos demonstram que, apesar das limitações atuais, a computação quântica representa um caminho promissor para a solução de problemas combinatórios complexos. À medida que essa tecnologia avança, espera-se que novos algoritmos e estratégias permitam resolver problemas antes considerados intratáveis, abrindo novas possibilidades para a ciência da computação e suas diversas aplicações no mundo real.

7 REFERÊNCIAS

- AJAGEKAR, A., You, F. **Quantum computing for energy systems optimization: Challenges and opportunities.** Energy, Elsevier, vol. 179(C), pages 76-89, 2019.
- ALMEIDA, N. G. de. **Introdução à computação e informação quântica.** Editora Livraria da Física, 2023.
- ALVES, W. M. S.; FELIPE, J. C. C. **Algoritmos Quânticos usando o Qiskit: Uma abordagem para o ensino de informação e computação quântica** – Revista Brasileira de Ensino de Física. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbef/a/9Zb64GgmTk5gtsg6rrsF8sN/?lang=pt>. Acessado em: 02/08/2024.
- ARRAZOLA, J. M. **Differentiable quantum computational chemistry with PennyLane.** arXiv:2111.09967, 2023.
- AWASTHI, A. et al. **Quantum Computing Techniques for Multi-knapsack Problems.** In: ARAI, K. (eds) Intelligent Computing. SAI 2023. Lecture Notes in Networks and Systems, vol 739. Springer, Cham, 2023. https://doi.org/10.1007/978-3-031-37963-5_19
- AWASTHI, A. et. al. **Real World Application of Quantum-Classical Optimization for Production Scheduling.** 2024 IEEE International Conference on Quantum Computing and Engineering (QCE). Volume: 2, Pages: 239-244.
- BARIONI, A. E. D.; MAZZI, F. B.; PIMENTA, E. B.; SANTOS, W. V.; LIMA, M. A. P. **Demystifying Quantum Mechanics.** In: Revista Brasileira de Ensino de Física. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbef/a/qzCFwpj9Wb6v6zHg9St5dfR/?lang=en>. Acesso em: 27/08/2024.
- BRANDÃO, C. **Ensaio sobre computação e informação quânticas: fundamentação e simulações sobre o efeito da entropia.** In: Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. Disponível em <https://acervodigital.unesp.br/handle/11449/89353>. Acesso em: 27/08/2024.
- CANABARRO; A. et. al. **Quantum Finance: um tutorial de computação quântica aplicada ao mercado financeiro.** Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 44, (2022).
- ESCARTIN, J. C. G.; POSADA, P. C. **Equivalent quantum circuits.** arXiv:1110.2998, 2011.
- FARHI, E., GOLDSTONE, J., GUTMANN, S. **A quantum approximate optimization algorithm.** arXiv preprint arXiv:1411.4028 (2014).

GERJUOY, E. **Shor's Factoring Algorithm and Modern Cryptography. An Illustration of the Capabilities Inherent in Quantum Computers.** American Journal of Physics, Volume 73, 521, 540, 2005. Disponível em:

<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2005AmJPh..73..521G/abstract>. Acesso em: 05/08/2024.

FERAOUN, H., et. al. **Quantum maximum power point tracking (QMPPT) for optimal solar energy extraction.** Systems and Soft Computing, Volume 6, 2024.

FRANÇA, D. S., GARCÍA-PATRÓN, R. **Limitations of optimization algorithms on noisy quantum devices.** Nat. Phys. 17, 1221–1227 (2021). <https://doi.org/10.1038/s41567-021-01356-3>

GLOVER, F., Kochenberger, G., Hennig, R. et al. **Quantum bridge analytics I: a tutorial on formulating and using QUBO models.** Ann Oper Res 314, 141–183 (2022).

JOSÉ, M. A.; PIQUEIRA; J. R. C.; LOPES, R. D. **Introdução à Programação Quântica.** In: Revista Brasileira de Ensino de Física. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbef/a/fXHgBXQHqmfz7kJ6CskyjYx/>. Acesso em: 02/08/2024.

KASIRAJAN, V. **Fundamentals of Quantum Computing.** Springer Cham. 2021.

KORTE, B., VYGEN, J. **Combinatorial Optimization.** Springer. 2018.

LADD, T., JELEZKO, F., LAFLAMME, R. et al. **Quantum computers.** Nature 464, 45–53, 2010. <https://doi.org/10.1038/nature08812>

LUCAS, A. **Ising formulations of many NP problems.** Front. Phys., Volume 2, 2014.

MONTANEZ, A. **Quadratic Unconstrained Binary Optimization (QUBO).** Pennylane, 2024. Disponível em https://pennylane.ai/qml/demos/tutorial_QUBO. Acessado em 10/12/2024.

OLIVEIRA, A. N.; DE OLIVEIRA, E. V. B.; SANTOS, A. C.; VILLAS-BOAS, C. J. **Algoritmos quânticos com IBMQ Experience: Algoritmo de Deutsch-Jozsa.** In: Revista Brasileira de Ensino de Física. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbef/a/jwThwdbMLr5M4GtgGMLk8Bn/>. Acesso em: 26/08/2024.

PATVARDHAN, C., Bansal, S. & Srivastav, A. **Quantum-Inspired Evolutionary Algorithm for difficult knapsack problems.** Memetic Comp. 7, 135–155 (2015).

PORTUGAL R., MARQUEZINO, F. L. **Introdução à Programação de Computadores Quânticos**. 38º Jornada de Atualização em Informática (JAI) XXXIX Congresso da Sociedade Brasileira de Computação, 2019.

ROUNDY, J. **10 Companies Building Quantum Computers**. TechTarget. Disponível em: <<https://www.techtarget.com/searchdatacenter/feature/Companies-building-quantum-computers>>. Acesso em 24 de set. de 2024.

SCHALLER, R. R. **Moore's law: past, present and future**. IEEE Spectrum, v. 34, n. 6, p. 52–59, 1997.

WONG, T. G. **Introduction to Classical and Quantum Computing**. Rooted Grove, 2022.